Вводная лекция

Асимптотика

$\approx n^2$ time $\quad O(n^2)$

$\approx n$ memory

$O, \Theta, \Omega, o, \omega$

$f(n), g(n)$

$f, g \geq 0$

Def $f = O(g)$, если

$\exists N, \exists C > 0 \ \forall n \geq N$

$f(n) \leq C g(n)$

Def: $f = \Theta(g)$ если

$\exists N, \ \exists C_1 > 0, C_2 > 0$

$\forall n \geq N \quad C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n)$

Def $f = \Omega(g)$, если

$\exists N \ \exists C > 0 \ \forall n \geq N$

$f(n) \geq C g(n)$

Примеры: ① $3n+4 = O(n)$

$N = 1 \qquad 3n+4 \le C \cdot n$

$C = 7 \qquad\qquad\qquad\; C = 7$

② $n^2 - n = \Theta(n^2)$

$c_1 = 0.9, \; c_2 = 7, \; N = 10$

$c_1 n^2 \le n^2 - n \le c_2 \cdot n^2$, $c_2 = 7$

③ $0.1 n^2 = \Omega(n)$

$\forall n \ge N \quad 0.1 n^2 \ge C \cdot n$

$N = 1, \quad C = 0.1, \quad N = 1$

$$\left| \begin{array}{ccc} O, & \Theta, & \Omega \\ \le & = & \ge \end{array} \right|$$

$n = O(n^2)$

Def: $f = o(g)$, если

$\forall C > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \ge N$

$f(n) \le C\, g(n)$

пример 1: $n = o(n^2)$

$C > 0$:

$$n \le 1/C\, n^2 \quad (\forall n \ge N), \quad N = C$$

$$1 \le 1/C\, n$$

$$C \le n$$

пример 2: $n^2 = o(10n^2)$?

$C > 0$: $n^2 \le 1/C \cdot 10 n^2$ $\quad \forall n \ge N$

$$\Updownarrow$$

$$1 \le C$$

Def $f = \omega(g)$, если

$\forall C > 0 \quad \exists N$

$\forall n \ge N \quad f(n) \ge C g(n)$

o	ω	O,	Θ,	Ω
$<$	$>$	$\le$	$=$	$\ge$

Свойства:

1. $f = \Theta(g) \iff g = \Theta(f)$

2. $f = O(g) \iff g = \Omega(f)$

3. $\begin{cases} f = O(g) \\ f = \Omega(g) \end{cases} \iff f = \Theta(g)$

4. $f = o(g) \iff g = \omega(f)$

5. $\begin{cases} f = O(g) \\ g = O(h) \end{cases} \implies f = O(h)$

6. $f \pm o(f) = \Theta(f)$

$n^2 - n = \Theta(n^2)$

Д-во 5

$\exists N_1, C_1 > 0$

$f(n) \le C_1 g(n) \quad \forall n \ge N_1$

$\exists N_2, C_2 > 0$

$g(n) \le C_2 h(n) \quad \forall n \ge N_2$

$C_3 = C_1 C_2, \ N_3 = \max(N_1, N_2)$

$f(n) \le C_3 \cdot h(n) \quad \forall n \ge N_3$

⑦ $f = o(g)$ ⇐ хотим

Пусть $g > 0$

$$\lim_{n\to\infty} f/g = 0 \Rightarrow f = o(g)$$

пример: $n = o(n^2)$

Как использовать

① моя программа работает за $O(n^2)$

② Формула Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Какие функции нам могут встретится

1 — константа

$\log^k n$ — логарифмические

n^k — полиномиальные ф-ции

$n^k \log^b n$ — полилогарифм ф-ии

c^n — экспоненциальные ф-ии

Утв: $n^k = o(c^n)$ $(\forall k > 0,\ c > 1)$

$n^{10} = o(1.01^n)$

Утв: $\log^k n = o(n^t)$ $(\forall k > 0, t > 0)$

$\frac{n^k}{c^n} \to 0$

$(\log^5 n = o(n^{0.1}))$

Замечание:

$\log_2 n = \log_3 n \cdot \log_2 3$

поэтому основание логарифма не важно

Утв Пусть $f = a_k n^k + \dots + a_0 n^0$

$a_k > 0$

Тогда $f = \Theta(n^k)$

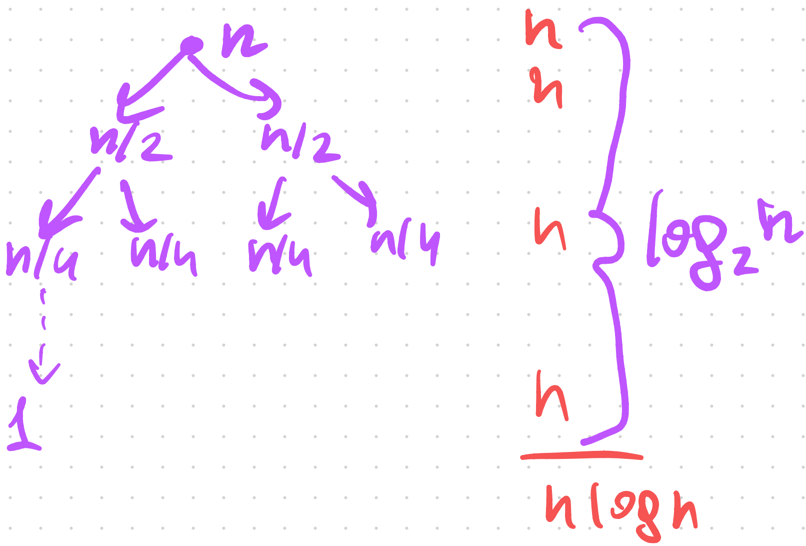
$n^2 - n = \Theta(n^2)$

Д-во: $F = \underbrace{a_k n^k}_{\Theta(n^k)} + \underbrace{\underbrace{\underbrace{a_{k-1} n^{k-1}}_{O(n^k)} + \dots + \underbrace{a_0 n^0}_{O(n^k)}}_{O(n^k)}}_{\Theta(n^k)}$

Мастер-Теорема

1980, Bentley
Haken
Saxe

$$T(n) = 2T(n/2) + n = O(n \log n)$$

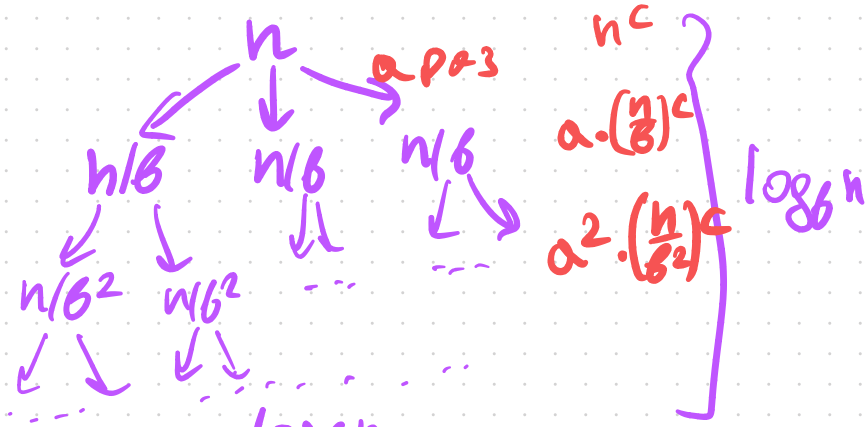


Теорема:

$$T(n) = aT(n/b) + n^c$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(?)$$

Д-во:



$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^c =$$

$$= n^c \sum_{i=0}^{\log_b n} \frac{a^i}{b^{ic}}$$

$$= n^c \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i$$

$\log = \Theta(1)$

$\rightarrow 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = \Theta(2^n)$

2^n ‖ $2^{n+1} - 1$

$\rightarrow 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = \Theta(n)$

$\rightarrow 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n} = \Theta(1)$

2^{-n} ‖ $2 - 2^{-n}$

$$T(n) = \begin{cases} a < b^c : & \Theta(n^c) \\ a = b^c : & \Theta(n^c \log n) \\ a > b^c : & \Theta(n^{\log_b a}) \end{cases}$$

$$T(n) = \Theta\left(n^c \cdot \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n}\right)$$

$a^{\log_a x} = x$

$$\Theta\left(n^c \, b^{\log_b\left(\frac{a}{b^c}\right) \log_b n}\right)$$

$$\Theta\left(n^c \, n^{\log_b (a/b^c)}\right)$$

$$\Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

Пример: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$a = 2$, $b = 2$, $c = 1$

$a \; ? \; b^c$

$2 \quad 2$

Экспоненциальные рекурренты

$$T(n) = T(n-1) + T(n-1)$$

$$G(n) = G(n-1) + G(n-2)$$

фиб.

$$T(n) = \begin{cases} n \geq 3 & T(n-1) + T(n-2) \\ \text{иначе} & \Theta(1) \end{cases}$$

если $T(n) = 2^n$:

$T(n) = 2T(n-1)$

"сойдётся"

УТВ: $T(n) = \Theta(2^n)$ | $T(n) = O(2^n)$

$T(n) \le C 2^n$

Д-во: индукция

база: $n \le 2$:

$T(n) \le C 2^n$

$n \in [1, 2]$

$\Rightarrow$ нужно выбрать достаточно большое C

Переход:

$n \le N-1$: $T(n) \le C 2^n$

$T(N) = 2T(N-1)$

$\le 2C \cdot 2^{N-1}$

$= C \cdot 2^N$

Общий случай

$$T(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i T(n - b_i)$$

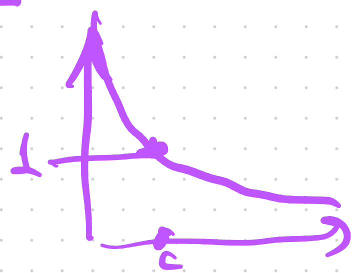
$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$

$k \geq 1$, $a_i > 0$, $b_i \geq 1$

<u>Шаг 1</u>: пусть $T(n) = c^n$

$$c^n = \sum_{i=1}^{k} a_i c^{n-b_i}$$

$$1 = \sum_{i=1}^{k} a_i c^{-b_i}$$



Утв: $T(n) = \Theta(c^n)$

$T(n) = O(c^n)$ $\leftarrow$ докажем это

$T(n) \leq A \cdot c^n$

Д-во по индукции

База: $n \leq \max b_i$

выберем A, чтобы

$T(n) \leq A \cdot c^n$

Переход: $\forall n \leq N-1$:

$T(n) \leq A \cdot c^n$

$$T(N) = \sum_{i=1}^{k} a_i \, T(N - b_i) \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{k} a_i \, A \, c^{N-b_i}$$
$$= A \sum_{i=1}^{k} a_i \, c^{N-b_i}$$
$$= A \cdot c^{N} \sum_{i=1}^{k} a_i \, c^{-b_i}$$
$$= A \cdot c^{N} \qquad \square$$

Пример:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$
$$c^n = c^{n-1} + c^{n-2}$$
$$1 = c^{-1} + c^{-2}$$
$$c^2 - c - 1 = 0$$
$$c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Утв: пусть f_n - числа фиб

$$f_n = \Theta\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

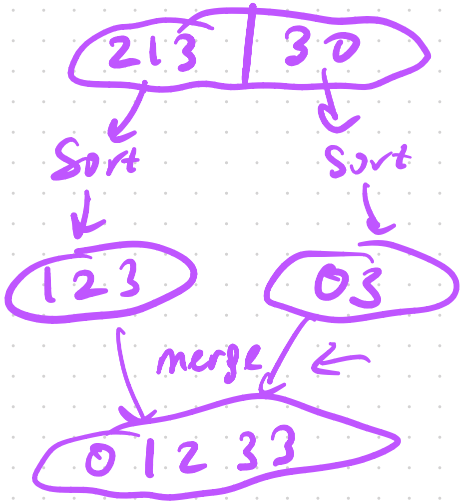
Merge Sort

$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$

2 1 3 3 0

0 1 2 3 3

Разделяй и властвуй



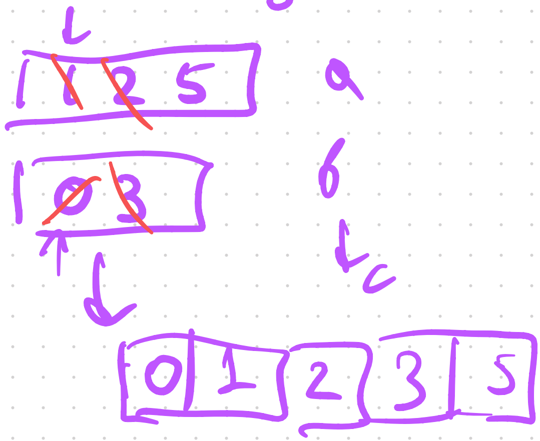
Sort(a)

$$T(n) = 2T(n/2) + n = \Theta(n \log n)$$

```
al, ar = a
Sort(al)
Sort(ar)
return merge(al, ar)
```

$\Theta(\text{len } a)$

Как сделать merge




```
merge(a[0..n-1], b[0..m-1],
      c[0..n+m-1]):
    pA = 0
    pB = 0
    pC = 0
    while pA ≠ n and
          pB ≠ m:
        if a[pA] ≤ b[pB]:
            c[pC++] = a[pA++]
        else:
            c[pC++] = b[pB++]
    while pA ≠ n:
        c[pC++] = a[pA++]
    while pB ≠ m:
        c[pC++] = b[pB++]
```

Стабильность:

1 3_a 2 5 $3_б$

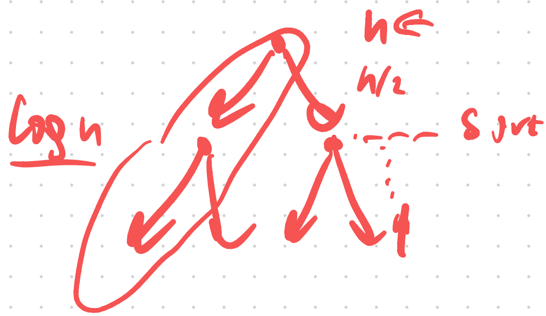
$\downarrow$

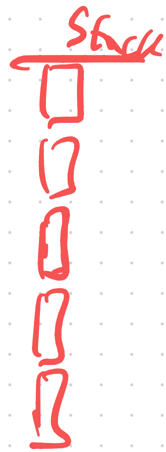
1 2 3_a $3_б$ 5 стабильная

1 2 $3_б$ 3_a 5 ← не стабильная

$T(n) = \Theta(n \log n)$ – время

Память





$\text{memory} = \Theta(n)$

$\parallel$

$n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots$